3項間漸化式で定義される数列について

高木　和久 *

Sequences Defined by Recurrence Relations of Order Two

Kazuhisa TAKAGI

Summary

Fibonacci numbers and Lucas numbers are very famous. They are defined by recurrence relations with order two. The author found that Fibonacci numbers are coefficients of the remainder of x^n divided by x^2-x-1. He also found a new way to get n-th element of a sequence defined by recurrence relations with order two. In this paper some equations about Fibonacci numbers and Lucas numbers are proved by using this new method.

Key Words：Recurrence relation of order two, Fibonacci numbers, Lucas numbers

1．まえがき

漸化式 $F_{n+2}-F_{n+1}-F_n=0,\ F_0=0,\ F_1=1$ で定められる数列 $\{F_n\}$ は Fibonacci 数列と呼ばれ、映画や小説などにも登場する有名な数列である。Fibonacci 数列の一般項は

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

で表わされる。また、Fibonacci 数列には $F_{n+2}+F_{n-2}=3F_n$ などの多くの関係式がある。これらの関係式は、一般項を表した式からでも導くことが可能であるが、母関数を用いるとより少ない計算で結果を得ることができる。Fibonacci 数列の母関数は $\frac{x}{1-x-x^2}$ である。この分数式を部分分数に分解してべき級数展開することにより

$$\frac{x}{1-x-x^2}=F_0+F_1x+F_2x^2+\cdots+F_nx^n+\cdots$$

を得る。この展開式を用いて Fibonacci 数列に関する様々な公式を導くことができる。しかしこの手法には微分の知識が必要で、低学年の学生には理解が困難である。本論文では、無限級数の代わりに多項式で割った余りを用いて証明を行う新しい手法について考察する。

＊高知工業高等専門学校ソーシャルデザイン工学科准教授

2．Fibonacci 数列と Lucas 数列

Fibonacci 数列と同じ漸化式 $L_{n+2}-L_{n+1}-L_n=0$ を満たす数列 $\{L_n\}$ を定義する。初期値が $L_0=2$，$L_1=1$ のときこの数列を Lucas 数列と呼ぶ。Lucas 数列は Fibonacci 数列と関連の深い数列である。さて、Fibonacci 数列の漸化式 $F_{n+2}-F_{n+1}-F_n=0$ から 2 次方程式 $x^2-x-1=0$ を作る。この方程式は特性方程式と呼ばれる。Lucas 数列も同じ特性方程式を持つ。この方程式を変形すると

$$x^2=x+1=F_2x+F_1$$

となる。一般に、次の定理 1 が成り立つ。

<u>定理 1</u>　n を自然数とするとき

$$x^n=(x^2-x-1)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1}F_ix^{n-i-1}\right)+F_nx+F_{n-1}$$

<u>証明</u>　$n=1$ のとき

$$x=(x^2-x-1)\cdot 0+x+0=(x^2-x-1)\cdot F_0+F_1x+F_0$$

となり、定理が成り立つ。次に $n=k$ のとき

$$x^k=(x^2-x-1)\cdot\left(\sum_{i=0}^{k-1}F_ix^{k-i-1}\right)+F_kx+F_{k-1}$$

が成り立つとする。両辺に x をかけると

$$\begin{aligned}
x^{k+1}&=(x^2-x-1)\cdot x\left(\sum_{i=0}^{k-1}F_ix^{k-i-1}\right)+F_kx^2+F_{k-1}x\\
&=(x^2-x-1)(F_1x^{k-1}+F_2x^{k-2}+\cdots+F_{k-1}x)+F_k(x^2-x-1)+F_k(x+1)+F_{k-1}x\\
&=(x^2-x-1)(F_1x^{k-1}+F_2x^{k-2}+\cdots+F_{k-1}x+F_k)+(F_k+F_{k-1})x+F_k\\
&=(x^2-x-1)\left(\sum_{i=0}^{k}F_ix^{k-i}\right)+F_{k+1}x+F_k
\end{aligned}$$

となり、$n=k+1$ のときも成り立つ。よって定理は全ての自然数 n に対して成り立つ。

<u>系</u>　$\sum_{i=0}^{n-2}F_i=F_n-1$

<u>証明</u>　定理 1 で $x=1$ とおくと

$$1=-\sum_{i=0}^{n-1}F_i+F_n+F_{n-1}=-\sum_{i=0}^{n-2}F_i+F_n$$

$$\therefore\sum_{i=0}^{n-2}F_i=F_n-1$$

<u>定理 2</u>　$F_{2n-1}=F_n^2+F_{n-1}^2$ および $F_{2n}=F_n(F_{n+1}+F_{n-1})$ が成り立つ。

<u>証明</u>　定理 1 より x^n を x^2-x-1 で割った余りは F_nx+F_{n-1} に等しい。$x^{2n}=(x^n)^2$ であるから x^{2n} を x^2-x-1 で割った余りは $(F_nx+F_{n-1})^2$ を x^2-x-1 で割った余りに等しい。
このときの商を $Q(x)$ とすると

$$x^{2n}=(x^2-x-1)Q(x)+F_{2n}x+F_{2n-1}$$

が成り立つ。そして、

$$(F_n x+F_{n-1})^2=F_n^2x^2+2F_nF_{n-1}x+F_{n-1}^2$$
$$=F_n^2(x^2-x-1)+F_n^2(x+1)+2F_nF_{n-1}x+F_{n-1}^2$$
$$=F_n^2(x^2-x-1)+(F_n^2+2F_nF_{n-1})x+F_n^2+F_{n-1}^2$$

であるから、$F_{2n-1}=F_n^2+F_{n-1}^2$ および $F_{2n}=F_n^2+2F_nF_{n-1}$ が成り立つ。
漸化式 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ を用いて式を変形すると

$$F_{2n}=F_n^2+2F_nF_{n-1}=F_n\,(F_n+F_{n-1}+F_{n-1})=F_n\,(F_{n+1}+F_{n-1})$$

となる。

Lucas 数列 $\{L_n\}$ についても、定理1と同様の定理が成り立つ。

定理3　n を自然数とするとき

$$x^n(2x-1)=(x^2-x-1)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1}L_ix^{n-i-1}\right)+L_nx+L_{n-1}$$

証明　$n=1$ のとき

$$x(2x-1)=2(x^2-x-1)+x+2=(x^2-x-1)\cdot L_0+L_1x+L_0$$

となり、定理が成り立つ。次に $n=k$ のとき

$$x^k(2x-1)=(x^2-x-1)\cdot\left(\sum_{i=0}^{k-1}L_ix^{k-i-1}\right)+L_kx+L_{k-1}$$

が成り立つとする。両辺に x をかけると

$$x^{k+1}(2x-1)=(x^2-x-1)\cdot x\left(\sum_{i=0}^{k-1}L_ix^{k-i-1}\right)+L_kx^2+L_{k-1}x$$
$$=(x^2-x-1)\cdot\left(\sum_{i=0}^{k}L_ix^{k-i}\right)+L_k\,(x+1)+L_{k-1}x$$
$$=(x^2-x-1)\left(\sum_{i=0}^{k}L_ix^{k-i}\right)+L_{k+1}x+L_k$$

となり、$n=k+1$ のときも成り立つ。よって定理は全ての自然数 n に対して成り立つ。

系　$\sum_{i=0}^{n-2}L_i=L_n-1$

証明　定理3で $x=1$ とおくと

$$1=-\sum_{i=0}^{n-1}L_i+L_n+L_{n-1}=-\sum_{i=0}^{n-2}L_i+L_n$$
$$\therefore\sum_{i=0}^{n-2}L_i=L_n-1$$

3．多項式の線形写像による像

多項式 $P(x)$ に対し、$P(x)$ を x^2-x-1 で割った余りを $\mathcal{F}(P(x))$ で表すことにすると次が成り立つ。

補題１　$\mathcal{F}$は線形写像である。すなわち、多項式 $P_1(x)$, $P_2(x)$ と実数 a , b に対し

$$\mathcal{F}(aP_1(x)+bP_2(x))=a\mathcal{F}(P_1(x))+b\mathcal{F}(P_2(x))$$

が成り立つ。

証明　$P_i(x)$ を x^2-x-1 で割ったときの商を $Q_i(x)$、余りを $c_ix+d_i(i=1,2)$ とすると

$$P_i(x)=(x^2-x-1)Q_i(x)+c_ix+d_i(i=1,2)$$

が成り立つ。このとき

$$aP_1(x)+bP_2(x)=(x^2-x-1)\{aQ_1(x)+bQ_2(x)\}+a(c_1x+d_1)+b(c_2x+d_2)$$

であるから、$aP_1(x)+bP_2(x)$ を x^2-x-1 で割ったときの余りは $a\mathcal{F}(P_1(x))+b\mathcal{F}(P_2(x))$ に等しい。

さて、定理１より

$$\mathcal{F}(x^n)=F_nx+F_{n-1}$$

である。定積分で用いられる記号を使うと

$$[\mathcal{F}(x^n)]_0^1=F_n$$

が成り立つ。同様に定理３より

$$\mathcal{F}(x^n(2x-1))=L_nx+L_{n-1},[\mathcal{F}(x^n(2x-1))]_0^1=L_n$$

が成り立つ。

$P(x)-Q(x)$ が x^2-x-1 の倍数であるとき

$$P(x)\equiv Q(x)\ mod\ x^2-x-1$$

と書くことにする。

補題２　(1)　$P(x)\equiv Q(x)\ mod\ x^2-x-1$ ならば $\mathcal{F}(P(x))=\mathcal{F}(Q(x))$

(2)　$0\le k\le n$ のとき $\mathcal{F}(x^n(x-1)^k)=\mathcal{F}(x^{n-k})$

証明　(1)は明らか。(2)は

$$x(x-1)=x^2-x=(x^2-x-1)+1$$

より

$$x(x-1)\equiv 1\ mod\ x^2-x-1$$

$$\therefore\ \mathcal{F}(x^n(x-1)^k)=\mathcal{F}(x^{n-k}x^k(x-1)^k)=\mathcal{F}(x^{n-k})$$

線形写像$\mathcal{F}$を用いる事により、Fibonacci 数列および Lucas 数列に関する多くの公式を簡単に証明する事ができる。

定理４　(1)　$F_{m+n}=F_nF_{m+1}+F_{n-1}F_m$

(2)　$L_{m+n}=F_nL_{m+1}+F_{n-1}L_m$

証明　(1)　$F_{m+n}=[\mathcal{F}(x^{m+n})]_0^1=[\mathcal{F}(x^mx^n)]_0^1$

ここで $x^n\equiv F_nx+F_{n-1}\ \ mod\ x^2-x-1$ であるから、補題２より

$$F_{m+n}=[\mathcal{F}(x^m(F_nx+F_{n-1}))]_0^1=[\mathcal{F}(F_nx^{m+1}+F_{n-1}x^m)]_0^1$$

補題１より $\mathcal{F}$ は線形写像であるから

$$\therefore\ F_{m+n}=F_n[\mathcal{F}(x^{m+1})]_0^1+F_{n-1}[\mathcal{F}(x^m)]_0^1=F_nF_{m+1}+F_{n-1}F_m$$

(2)　$L_{m+n}=[\mathcal{F}(x^{m+n}(2x-1))]_0^1=[\mathcal{F}(x^mx^n(2x-1))]_0^1$

ここで $x^n \equiv F_n x + F_{n-1} \ \ mod\ x^2 - x - 1$ であるから、補題2より

$$L_{m+n} = [\mathcal{F}(x^m(F_n x + F_{n-1})(2x-1))]_0^1$$

$\mathcal{F}$は線形写像であるから

$$\therefore L_{m+n} = F_n[\mathcal{F}(x^{m+1}(2x-1))]_0^1 + F_{n-1}[\mathcal{F}(x^m(2x-1))]_0^1 = F_n L_{m+1} + F_{n-1} L_m$$

定理5　(1)　$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$

(2)　$L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$

(3)　$F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} = L_{n+3}$

証明

(1)　$F_{n+1} + F_{n-1} = [\mathcal{F}(x^{n+1})]_0^1 + [\mathcal{F}(x^n(x-1))]_0^1 = [\mathcal{F}(x^{n+1} + x^n(x-1))]_0^1 = [\mathcal{F}(x^n(2x-1))]_0^1 = L_n$

(2)　$L_{n+1} + L_{n-1} = [\mathcal{F}(x^{n+1}(2x-1))]_0^1 + [\mathcal{F}(x^n(x-1)(2x-1))]_0^1$

$$= [\mathcal{F}(x^{n+1}(2x-1) + x^n(x-1)(2x-1))]_0^1$$

ここで

$$x^{n+1}(2x-1) + x^n(x-1)(2x-1) = x^n(2x-1)^2 = x^n(4x^2 - 4x + 1)$$
$$= x^n\{4(x^2 - x - 1) + 5\} \equiv 5x^n \ \ mod\ x^2 - x - 1$$

であるから、補題2より

$$L_{n+1} + L_{n-1} = [\mathcal{F}(5x^n)]_0^1 = 5[\mathcal{F}(x^n)]_0^1 = 5F_n$$

(3)　左辺 $= F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} = [\mathcal{F}(x^n(1 + x + x^2 + x^3))]_0^1$ であるが、

$1 + x + x^2 + x^3 \equiv 4x + 3 \ \ mod\ x^2 - x - 1$ であるから

$$\therefore 左辺 = [\mathcal{F}(x^n(4x+3))]_0^1$$

一方、$L_{n+3} = [\mathcal{F}(x^{n+3}(2x-1))]_0^1 = [\mathcal{F}(x^n x^3(2x-1))]_0^1$ であるが、

$x^3(2x-1) = 2x^4 - x^3 \equiv 4x + 3\ mod\ x^2 - x - 1$ であるから

$$\therefore 右辺 = [\mathcal{F}(x^n x^3(2x-1))]_0^1 = [\mathcal{F}(x^n(4x+3))]_0^1$$
$$\therefore F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} = L_{n+3}$$

4．漸化式で定められる数列の一般項

Fibonacci 数列 $\{F_n\}$ の一般項を求めよう。定理1より

$$x^n = (x^2 - x - 1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i x^{n-i-1} \right) + F_n x + F_{n-1}$$

が成り立つ。$x^2 - x - 1 = 0$ の2つの解を $\alpha, \beta\ (\alpha > \beta)$ とすると

$$\alpha^n = F_n \alpha + F_{n-1}\ ,\ \ \beta^n = F_n \beta + F_{n-1}$$

であるから、

$$\therefore \alpha^n - \beta^n = F_n(\alpha - \beta) = \sqrt{5}\ F_n$$
$$\therefore F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

となる。

また、Lucas 数列の一般項については、$\alpha + \beta = 1$ であるから、

$$\alpha^n + \beta^n = F_n(\alpha + \beta) + 2F_{n-1} = F_n + F_{n-1} + F_{n-1} = F_{n+1} + F_{n-1}$$

定理5(1)より $F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$ であるから

$$\therefore L_n = \alpha^n + \beta^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

さて、漸化式で定義される数列の一般項を求める問題は大学入試でも数多く出題される。これらの問題に対応できるようにするために、定理1を次のように一般化する。

定理6　任意の実数 p, q に対し、漸化式

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ について、次の式が成り立つ。

$$x^n = (x^2 - px - q)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i-1}\right) + a_n x + q\cdot a_{n-1}$$

証明　$n=1$ のとき

$$x = (x^2 - px - q)\cdot 0 + x + q\cdot 0 = (x^2 - px - q)\cdot a_0 + a_1 x + q\cdot a_0$$

となり、定理が成り立つ。次に $n=k$ のとき

$$x^k = (x^2 - px - q)\cdot\left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i x^{k-i-1}\right) + a_k x + q\cdot a_{k-1}$$

が成り立つとする。両辺に x をかけると

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= (x^2 - px - q)\cdot x\left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i x^{k-i-1}\right) + a_k x^2 + q\cdot a_{k-1}x \\ &= (x^2 - px - q)\left(\sum_{i=0}^{k} a_i x^{k-i}\right) + a_k(px+q) + q\cdot a_{k-1}x \\ &= (x^2 - px - q)\left(\sum_{i=0}^{k} a_i x^{k-i}\right) + a_{k+1}x + q\cdot a_k \end{aligned}$$

となり、$n=k+1$ のときも成り立つ。よって定理は全ての自然数 n に対して成り立つ。

定理6を用いていくつかの問題を解いてみよう。

問題1　漸化式 $a_{n+2} = 8a_{n+1} - 7a_n,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解　方程式 $x^2 = 8x - 7$ の解は7と1である。定理6より

$$x^n = (x^2 - 8x + 7)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i-1}\right) + a_n x - 7a_{n-1}$$

であるから、$7^n = 7a_n - 7a_{n-1},\ 1 = a_n - 7a_{n-1}$ が成り立つ。

$$\therefore 7^n - 1 = 6a_n$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{6}(7^n - 1)$$

問題2　漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

北海道大学 2014

解　方程式 $x^2 = x + 3$ の2つの解を $\alpha, \beta\ (\alpha > \beta)$ とする。定理6より

$$x^n = (x^2 - x - 3)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i-1}\right) + a_n x + 3a_{n-1}$$

であるから、

$$\alpha^n = \alpha a_n + 3a_{n-1},\ \ \beta^n = \beta a_n + 3a_{n-1}$$

これより、

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)a_n = \sqrt{13}\,a_n$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{\sqrt{13}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right\}$$

次の問題では、a_0 の値が0でないため直接、定理6を適用することができない。こういう場合には x^n の代わりに $x^n(x+k)$ を用いることで解決できる。

問題3　漸化式 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n,\ a_0 = 1,\ a_1 = 1$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

中京大学 2007

解　$x^n(x+k) = (x^2 - 5x + 6)\cdot(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i-1}) + a_n x - 6a_{n-1}$

を満たす実数 k を求める。$n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} x(x+k) = x^2 + kx &= (x^2 - 5x + 6) + 5x - 6 + kx \\ &= (x^2 - 5x + 6) + (k+5)x - 6\cdot 1 \end{aligned}$$

$k + 5 = a_1 = 1$ とおくと $k = -4$ となる。このとき任意の自然数 n に対し

$$x^n(x-4) = (x-2)(x-3)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i-1}\right) + a_n x - 6a_{n-1}$$

が成り立つ。$3^n(-1) = 3a_n - 6a_{n-1},\ 2^n(-2) = 2a_n - 6a_{n-1}$ より

$$\therefore a_n = (-1)3^n - (-2)2^n = 2^{n+1} - 3^n$$

5．n乗の和がある数の倍数であることの証明

次の問題4のような、2数の n 乗の和あるいは差がある数の倍数であることを証明する問題も大学入試でよく出題される。

問題4　すべての自然数 n に対して $3^{3n} - 2^n$ が25の倍数であることを証明せよ。

関西大学 2006

解　$3^{3n} - 2^n = (3^3)^n - 2^n = 27^n - 2^n$ である。27と2を解とする2次方程式は $x^2 - 29x + 54 = 0$ である。漸化式 $a_{n+2} = 29a_{n+1} - 54a_n,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1$ で定義される数列 $\{a_n\}$ を考えると a_n は全て整数であり

$$x^n = (x^2 - 29x + 54)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i-1}\right) + a_n x - 54a_{n-1}$$

が成り立つから、

$$27^n = 27a_n - 54a_{n-1},\ \ 2^n = 2a_n - 54a_{n-1}$$

$$\therefore 27^n - 2^n = 25a_n$$

よって $3^{3n} - 2^n$ は25の倍数である。

この解法を一般化して次の定理7を得る。

定理７　任意の整数 p, q, α, β に対し、$p\alpha+q\beta$ が $p+q$ の倍数であるならば、0以上の任意の整数 n に対し、$p\alpha^n+q\beta^n$ も $p+q$ の倍数である。

証明　$n=0$ のとき、$p\alpha^n+q\beta^n=p+q$ となり定理は成り立つ。$n=1$ のときは仮定より成り立つ。
n が2以上の自然数である時に定理が成り立つ事を示す。漸化式

$$a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n,\ a_0=0,\ a_1=1$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ について、a_n は全て整数で次の式が成り立つ。

$$x^n=\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_i x^{n-i-1}\right)+a_n x-\alpha\beta a_{n-1}$$

$\alpha^n=\alpha a_n-\alpha\beta a_{n-1}$ より $p\alpha^n=p\alpha a_n-p\alpha\beta a_{n-1}$、$\beta^n=\beta a_n-\alpha\beta a_{n-1}$ より $q\beta^n=q\beta a_n-q\alpha\beta a_{n-1}$
であるから

$$\therefore p\alpha^n+q\beta^n=(p\alpha+q\beta)a_n-(p+q)\alpha\beta a_{n-1}$$

$p\alpha+q\beta$ は $p+q$ の倍数であったから、$p\alpha^n+q\beta^n$ は $p+q$ の倍数である。

問題５　任意の自然数 n に対し $2^{6n-5}+3^{2n}$ が11の倍数であることを証明せよ。

学習院大学 2009

解　$2^{6n-5}+3^{2n}=2^{6(n-1)+1}+3^{2(n-1)+2}=2\cdot(2^6)^{n-1}+3^2\cdot(3^2)^{n-1}=2\cdot 64^{n-1}+9\cdot 9^{n-1}$
であるが、$2\cdot 64+9\cdot 9=209=11\cdot 19$ であるから、定理7より $2^{6n-5}+3^{2n}$ は11の倍数である。

問題６　任意の自然数 n に対し $4^{n+1}+5^{2n-1}$ が21で割り切れることを証明せよ。

静岡大学 2013

解　$4^{n+1}+5^{2n-1}=4^{(n-1)+2}+5^{2(n-1)+1}=16\cdot 4^{n-1}+5\cdot 25^{n-1}$ である。
$16\cdot 4+5\cdot 25=189=21\cdot 9$ であるから、定理7より $4^{n+1}+5^{2n-1}$ は21で割り切れる。

問題７　任意の自然数 n に対し $2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}$ が5で割り切れることを証明せよ。

徳島大学 2013

解　$2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}=2^{n-1}+3\cdot 27^{n-1}+7^{n-1}$ である。x^{n-1} を $(x-2)(x-27)(x-7)$ で割った時の商を $Q(x)$、余りを ax^2+bx+c とすると a, b, c は整数であり

$$x^{n-1}=(x-2)(x-27)(x-7)Q(x)+ax^2+bx+c$$

x に2, 27, 7を順に代入することにより

$$2^{n-1}=2^2a+2b+c,\ 27^{n-1}=27^2a+27b+c,\ 7^{n-1}=7^2a+7b+c$$

$$\therefore 2^{n-1}+3\cdot 27^{n-1}+7^{n-1}=(2^2+3\cdot 27^2+7^2)a+(2+3\cdot 27+7)b+(1+3+1)c$$
$$=2240a+90b+5c=5(448a+18b+c)$$

よって $2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}$ は5で割り切れる

これまでは α, β が実数の場合を考えてきたが、入試問題では複素数である場合も数多く出題されている。α, β が複素数の場合に次の定理が成り立つ。

定理８　任意の自然数 n と複素数 α, β に対し、$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ が整数のとき、次が成り立つ。
(1)　$\alpha^n+\beta^n$ は整数で、n が奇数の時は $\alpha+\beta$ の倍数である。
(2)　$(\alpha+\beta)^n-\alpha^n-\beta^n$ は整数で $\alpha\beta$ の倍数である。

証明　(1)　漸化式

$$a_{n+2} = (\alpha+\beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ について、a_n は全て整数であり、a_n が$\alpha+\beta$の倍数ならば a_{n+2} も$\alpha+\beta$の倍数である。$a_0 = 0$ であるから、n が偶数のとき a_n は$\alpha+\beta$の倍数となる。定理6より等式

$$x^n = \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i-1}\right) + a_n x - \alpha\beta a_{n-1}$$

$$\therefore x^n = (x-\alpha)(x-\beta)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i-1}\right) + a_n x - \alpha\beta a_{n-1}$$

が成り立つ。x にα, βを順に代入することにより$\alpha^n = a_n\alpha - \alpha\beta a_{n-1}$, $\beta^n = a_n\beta - \alpha\beta a_{n-1}$ を得るので

$$\therefore \alpha^n + \beta^n = a_n(\alpha+\beta) - 2\alpha\beta a_{n-1}$$

よって全ての自然数 n に対し、$\alpha^n + \beta^n$ は整数である。
n が奇数の時は $n-1$ は偶数であるから a_{n-1} は $\alpha+\beta$の倍数であり、$\alpha^n + \beta^n$ も $\alpha+\beta$ の倍数となる。

(2)　(1)で用いた等式の x に$\alpha+\beta$を代入すると

$$(\alpha+\beta)^n = \beta\alpha\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i (\alpha+\beta)^{n-i-1}\right) + a_n(\alpha+\beta) - \alpha\beta a_{n-1}$$

となる。これより

$$(\alpha+\beta)^n - \alpha^n - \beta^n = \alpha\beta\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i (\alpha+\beta)^{n-i-1}\right) + \alpha\beta a_{n-1}$$

が得られるので、$(\alpha+\beta)^n - \alpha^n - \beta^n$ は整数であって、$\alpha\beta$の倍数である。

問題8　2次方程式 $x^2 - 3x + 5 = 0$ の2つの解α, βに対し$\alpha^n + \beta^n - 3^n$ は全ての正の整数 n について5の整数倍になることを示せ。　東京工業大学 2013

解　解と係数の関係より $\alpha+\beta = 3$, $\alpha\beta = 5$ である。定理8より $(\alpha+\beta)^n - \alpha^n - \beta^n = 3^n - \alpha^n - \beta^n$ は整数で $\alpha\beta = 5$ の倍数であるから、$\alpha^n + \beta^n - 3^n$ は5の整数倍である。

7．終わりに

隣接3項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + pa_n$ で定義される数列については高専でも高等学校でも第2学年で履修するが、本論文で述べたような活用方法があることは知られていない。Fibonacci 数列や Lucas 数列についての公式は多数あるので、今後もそれらの新証明の発見に取り組んでゆきたい。

参考文献

(1)　高木和久：デジタル時代の新・剰余定理について、日本 STEM 教育学会第2回年次大会、2019
https://www.j-stem.jp/wp/wp-content/uploads/2019/09/D01.pdf

受理日：2019年10月28日